Inleiding Algebraïsche Meetkunde

1974/1975

M. van der Put

Hoofdstuk I. Inleiding.

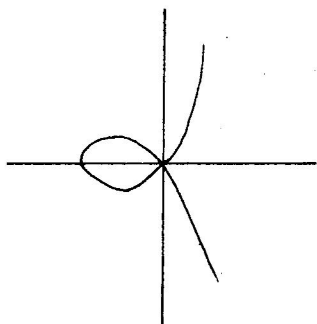
§ 1. Vlakke algebraïsche krommen.

(1.1.) definitie. Een vlakke algebraïsche kromme is de nulpuntsverzameling in $\mathbb{C}^2$ van een polynoom $F \in \mathbb{C}[X,Y]$; de kromme heet rationaal als F irreducibel is (d.w.z. F is een priemelement in de ontbingsring $\mathbb{C}[X,Y]$) en er rationale funkties $\phi(T)$, $\psi(T)$ (i.e. $\phi, \psi \in \mathbb{C}(T)$ quotientenlichaam van $\mathbb{C}[T]$) bestaan, zó , dat

(i) $F(\phi(t), \psi(t)) = 0$ voor alle $t \in \mathbb{C}$ waarvoor de uitdrukking zinvol is.

(ii) ϕ en ψ zijn niet beide constant.

Een rechte in $\mathbb{C}^2$ is duidelijk een rationale kromme; ook een cirkel is zoals bekend een rationale kromme: $X^2 + Y^2 - 1$ wordt geparametriseerd door $(\frac{1-T^2}{1+T^2}, \frac{2T}{1+T^2})$. Verder is bijvoorbeeld $F = Y^2 - X^2 + X^3$ een rationale kromme, want:



Snijdt de lijnen $y = tx$ (door het dubbelpunt 0 van de kromme) met de kromme. Men vindt als snijpunt $(1 - t^2, t(1 - t^2))$. En $(1 - T^2, T(1 - T^2))$ is dan een parametrizering.

Opgave 1. Bewijs dat de lemniscaat $(X^2 + Y^2) = \alpha^2 (X^2 - Y^2)$ rationaal is. (Aanwijzing: beschouw de intersectie met een bundel cirkels $X^2 + Y^2 = t(X - Y)$).

Het geven van een parametrizering van een irreducibele kromme F is equivalent met het geven van een injektief homomorfisme

$\mathbb{C}[X,Y]/_F \to \mathbb{C}(T)$, of met het geven van een homomorfisme $/_{\mathbb{C}}$:
K = quotientenlichaam van $\mathbb{C}[X,Y]/_F \to \mathbb{C}(T)$.

In dit verband is de stelling van Lüroth van belang:

(1.2.) Laten $k \underset{\neq}{\subset} k' \subset k(T)$ lichamen zijn. Dan is k' zuiver transcendent over k (i.e. $k' = k(S)$ voor zekere S).

Bewijs. Eerst een lemma van Gausz.

(1.3.) Zij R een ontbindsring; $F = f_0 + f_1X + \ldots + f_r X^r \in R[X]$ heet primitief als $\text{ggd}(f_0,\ldots,f_r) = 1$. Als $F,G \in R[X]$ primitief zijn dan ook FG.

Bewijs. Zij p een priemelement van R en i_0 resp. j_0 de kleinste getallen met $p \nmid f_{i_0}$ en $p \nmid g_{i_0}$, waarbij $G = g_0 + g_1X + \ldots + g_sX^s$. De coefficient van X^n $(n = i_0 + j_0)$ in FG heeft de vorm
$f_{i_0}g_{j_0} + \sum_{i<i_0} f_ig_{n-i} + \sum_{i<j_0} g_if_{n-i}$. Dit is niet door p deelbaar.

Bewijs van (1.2.): Kies $a \in k'\backslash k$ en schrijf $a = \frac{p(T)}{q(T)}$ met $p,q \in k[T]$.
Dan is $q(X)a - p(X)$ een vergelijking voor T over k'. Zij
$F = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ de minimale vergelijking van T over k'.
Een coefficient $a = a_{i_0} \in k'\backslash k$ en schrijf die als $\frac{p(T)}{q(T)}$ met $p,q \in k[T]$ en $\text{ggd}(p,q) = 1$. Schrijf ook $a_i = \frac{b_i(T)}{b_0(T)}$ met $i = 1,\ldots,n$; $b_i \in k[T]$ en $\text{ggd}(b_0,\ldots,b_n) = 1$. Zij $m = \max_{0\leq i\leq n}$ graad b_i, dan max graad $p,q \leq m$.
Ook $p(X) - aq(X)$ is een vergelijking voor T over k', dus
$p(X) - aq(X) = Q(X)F(X)$, voor zeker $Q \in k'[X]$. Na uitvermenigvuldigen van de noemers krijgen we:

$$[q(T)p(X) - p(T)q(X)]\; q_0(T)b_0(T) = [q_0(T)Q(X)][b_0(T)F(X)]q(T)$$

De uitdrukkingen in de vierkante haken zijn primitieve polynomen in X over de ontbindingsring $k[T]$. Volgens het lemma: $q_0(T)b_0(T) = \lambda q(T)$ met $\lambda \in k^*$. En we vinden $q(T)p(X) - p(T)q(X) = \tilde{Q}(X,T)[b_0(T)X^n + \ldots + b_n(T)]$.
Vergelijken van de T-graden levert dat $\tilde{Q}$ niet van T afhangt. De linkerkant is niet door een polynoom in X ($\neq$ constante) deelbaar. Dus $\tilde{Q} \in k^*$.

Wegens de symmetrie in X en T is m = n en $p(X) - aq(X)$ is ook een minimale vergelijking van T over k'. Dan $k(a) \subset k' \subset k(T)$ en $[k(T): k(a)] = [k(T): k'] = m = n$. Dus $k' = k(a)$.

Opmerking. Voor transcendentiegraad 2 is een analoge uitspraak juist (Castelnuovo ± 1910) $k \subset k' \subset k(S,T)$ en k'/k heeft transcendentiegraad 2 dan is $k' = k(S',T')$. Voor transcendentiegraad $\geqslant 3$ is de analoge bewering onjuist. Tegenvoorbeelden zijn gegeven door Griffith, Murre et al. ± 1972.

Opgave 2. Bewijs dat ieder k-automorfisme van k(T) de vorm $T \mapsto \frac{aT+b}{cT+d}$, $ad-bc \neq 0$, heeft. Toon verder aan dat de groep van de automorfismen isomorf is met

$$Gl(2,k)/_{\{\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in k^*\}}.$$

(1.4.) Gevolg. Als een kromme F geparametriseerd kan worden, dan bestaat er een parametrizering $(\phi(T),\psi(T))$ zódat

(i) $t \to (\phi(t),\psi(t))$ is surjectief op eindig veel uitzonderingen na.

(ii) $t \to (\phi(t),\psi(t))$ is injectief " " " " ringen na.

Bewijs. Volgens (1.2.) is het quotientenlichaam van $\mathbb{C}[X,Y]/_F$ gelijk aan $\mathbb{C}(T)$. Dan zijn x en y rationale functies $\phi(T),\psi(T)$ in T en omgekeerd is T een rationale functie van x en y. Als men de eindig vele nulpunten van de noemers in deze uitdrukken vermijdt, dan is de afbeelding bijectief.

(1.5.) definitie. Laten X en Y vlakke irreducibele algebraïsche krommen zijn, behorende bij de polynomen F en G. Een "afbeelding" van X naar Y heet rationaal als hij gegeven wordt door rationale functies, d.w.z. door een homomorfisme $Qt(\mathbb{C}[X,Y]/_G) \xrightarrow{\alpha} Qt(\mathbb{C}[X,Y]/_F)$. (hierbij duidt "Qt" de

vorming van het quotientenlichaam aan).

De afbeelding heet birationaal als α een isomorfie is.

Het classificeren van birationale equivalentieklassen van irreducibele krommen komt dus neer op het classificeren van hun "functielichamen" $Qt(\mathbb{C}[X,Y]/_F)$. Dit is een vrij subtiele meetkundige zaak die we in een latere paragraaf hopen te behandelen. Merk nog op dat een kromme rationaal is dan en slechts dan als de kromme birationaal equivalent is met een rechte.

Opgave 3. Bewijs dat iedere tweedegraads kromme rationaal is.

Opgave 4. Bewijs dat $Y^2 - (X^3-AX-B)$ rationaal is $\Leftrightarrow$ X^3+AX+B heeft een meervoudige wortel. (werk over lichamen met karakteristiek $\neq 2$).

(1.6.) De kromme X^n+Y^n-1 is niet rationaal als $n \geqslant 3$ (en n niet deelbaar door de karakteristiek).

Bewijs. Zij $(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$ een parametrizatie; $p,q,r \in k[T]$ en $ggd(p,q,r)=1$. Dan $p^n+q^n=r^n$ en na differentiëren $p'p^{n-1}+q'q^{n-1} = r'r^{n-1}$. Beschouw de matrix $(\begin{smallmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{smallmatrix})$. Deze heeft de vectoren $(p^{n-1},q^{n-1},r^{n-1})$ en $(qr'-rq', rp'-pr', pq'-p'q)$ in zijn kern. De kern heeft als lineaire ruimte over $k(T)$ d mensie 1. Omdat $ggd(p,q,r) = 1$ volgt er

$$p^{n-1}|qr'-q'r,\ q^{n-1}|rp'-r'p,\ r^{n-1}|pq'-p'q.$$

Noem de graden van p,q en r resp. a,b en c. Dan $(n-1)a \leqslant b+c-1$; $(n-1)b \leqslant a+c-1$; $(n-1)c \leqslant a+b-1$. Dus $(n-3)(a+b+c) \leqslant -3$. Dit is in tegenspraak met $n \geqslant 3$.

§ 2. Gesloten deelverzamelingen van de affiene ruimte.

(2.1.) definities. We werken over een algebraïsche gesloten lichaam k. De n-dimensionale lineaire ruimte over k noteren we met A^n. Een deelverzameling $X \subset A^n$ heet (Zariski-) gesloten als er eindig veel polynomen $f_1,\dots,f_s \in k[X_1,\dots,X_n]$ zijn met $X = \{a \in A^n | f_1(a)=\dots=f_s(a)=0\}$. Zoals bekend is $k[X_1,\dots,X_n]$ een noetherse ring (gevolg van Hilbert's basis-stelling) en wordt derhalve ieder ideaal in $k[X_1,\dots,X_n]$ eindig voortgebracht. Voor een oneindige collectie polynomen $\{f_i | i \in I\}$ bestaat er een eindige deelverzameling $J \subset I$ zódat $\{f_i | i \in I\}$ en $\{f_i | i \in J\}$ hetzelfde ideaal opspannen. Hiermee ziet men gemakkelijk in dat de collectie Zariski-gesloten deelverzamelingen van A^n een "topologie vormen".

Opgave 5. Bewijs dat $X_1 \cup X_2$ gesloten is als X_1, $X_2 \subset A^n$ gesloten zijn.

Opgave 6. Is A^n compact?

Voorbeelden. (1) De gesloten deelverzamelingen van A^1 zijn: $\emptyset$, A^1, eindige deelverzamelingen.

(2) De gesloten deelverzamelingen van A^2 zijn: $\emptyset$, A^2, eindige deelverzamelingen, krommen, kromme verenigd met eindig veel punten.

(3) Merk op dat de topologie op A^2 niet de product-topologie is.

bewijs van (2). Zij $X \subset A^2$ gegeven door $\{f_1,\dots,f_s\}$. Laat $d = \text{ggd}(f_1,\dots,f_s)$ en schrijf $f_i = dg_i$. Dan $X = X_1 \cup X_2$ met $X_1 = \{a \in A^2 | d(a)=0\}$ en $X_2 = \{a \in A^2 | g_1(a)=\dots=g_s(a)\}$. Nu is X_1 een kromme of $\emptyset$ (als $d = 1$). We tonen aan dat X_2 een eindige verzameling is. Beschouw $g_1,\dots,g_s \in k[T_1,T_2]$ als elementen van $k(T_1)[T_2]$. Nog steeds is hun ggd = 1. Bekend is dat zij dan het éénheidsideaal voortbrengen. Dus $1 = \sum_{i=1}^{s} A_i g_i$ voor zekere $A_i \in k(T_1)[T_2]$. Na verdrijving van de noemers $0 \neq a(T_1) = \Sigma\, a_i(T_1,T_2)g_i$. Analoog bevat het ideaal $(g_1,\dots,g_s)$ een polynoom $b(T_2)$. Dus is X_2 eindig.

In plaats van te zeggen dat een gesloten $X \subset A^n$ door een aantal elementen $\{f_1,\dots,f_s\}$ gegeven wordt kan men ook stellen dat X door het ideaal $(f_1.\dots,f_s)$ gegeven wordt. Een natuurlijke vraag is:

*) Wanneer definieren twee idealen dezelfde gesloten verzameling?

Het antwoord zal volgen uit:

(2.2.) Hilbert's Nullstellensatz. Zij $X \subset A^n$ een gesloten verzameling gegeven door een ideaal I. Als $f \in k[T_1,\dots,T_n]$ identiek nul is op X dan voor zekere $r \in \mathbb{N}$, $f^r \in I$.

(2.3.) Gevolg. Er is een 1-1 verband tussen de gesloten deelverzamelingen van A^n en de radikale idealen (i.e. idealen die voldoen aan $f^r \in I \Rightarrow f \in I$) van $k[T_1,\dots,T_n]$.

Bewijs. Aan X voegen we het radikale ideaal $id(X) = \{f \in k[T_1,\dots,T_n] \mid f \text{ is } 0 \text{ op } X\}$ en aan een radikaal ideaal I voegen we toe $n(I) = \{a \in A^n \mid f(a) = 0 \text{ voor alle } f \in I\}$.

Opgaven. 7. Bewijs dat de afbeeldingen id( ) en n( ) inclusies omkeren en elkaars inversen zijn.

8. Wat is het antwoord op de vraag *)?

9. Toon aan dat er geen oneindige dalende keten gesloten deelverzamelingen in A^n bestaat.

In plaats van een kort slim bewijs van (2.2.) geven we een wat langer bewijs en ontwikkelen daarbij wat nuttige algebra.

(2.4.) lemma. Laten $A \subset B$ ringen zonder nuldelers zijn zó dat B als A-moduul eindig voortgebracht is. Dan geldt: B is een lichaam dan en slechts dan als A dat is.

Bewijs. "$\Rightarrow$" Een element $x \in A$, $x \neq 0$ heeft een inverse $y \in B$. Het element y voldoet aan een relatie $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ waarbij alle $a_i \in A$. (Hierbij is de voorwaarde dat A en B geen nulders bezitten overbodig). Want, zij $b_1,\dots,b_n$ een stel voortbrengers van het A-

moduul B. Dan $yb_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} b_j$ voor zekere $\lambda_{ij} \in A$. Dus $\sum_{j=1}^{s} (\delta_{ij}y-\lambda_{ij}) b_j$ $= 0$ ($\delta_{ij} = 0$ of 1 naar gelang $i \neq j$ of $i = j$). Volgens de regel van Cramer voldoet de determinant Δ van de matrix $(\delta_{ij}y-\lambda_{ij})$ aan $\Delta b_i=0$ voor alle i. Dus is $\Delta = 0$ en $\Delta = y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\ldots+a_0$ voor geschikte $a_0,\ldots,a_{n-1} \in A$.

Dan ook $x^ny^n+xa_{n-1}(xy)^{n-1}+\ldots+x^na_0=0$ en $1=x(-a_{n-1}-\ldots-x^{n-1}a_0)$. Dus $y \in A$ en A is een lichaam.

"$\Leftarrow$". Een element $x \in B$, $x \neq 0$ levert een injectieve lineaire afbeelding $B \xrightarrow{x} B$. Omdat B een eindigdimensionale lineaire ruimte over A is, is de afbeelding bijectief en heeft x een inverse.

(2.5.) Lying over. (Cohen-Seidenberg). Laten $A \subset B$ twee ringen zijn zó dat B een eindig voortgebracht A-moduul is. Dan is er bij ieder priemideaal $\underline{p}$ in A een priemideaal $\underline{q}$ in B met $\underline{q} \cap A = \underline{p}$ (men zegt: $\underline{q}$ ligt boven $\underline{p}$). Bovendien komt er in de verzameling $\{\underline{q} | \underline{q}$ priemideaal in B, $\underline{q} \cap A = \underline{p}\}$ geen echte inclusie voor.

Bewijs. Zij S de multiplicatieve verzameling $A \backslash \underline{p}$. Na lokalisatie $A_S \subset B_S$ is de ringuitbreiding nog steeds eindig. Kies een ideaal $\underline{q}$ in B dat maximaal is t.o.v. $\underline{q} \cap S = \emptyset$. Dan is $\underline{q}$ priem (ga na) en $\underline{q}B_S$ is een maximaal ideaal van B_S. Op de ringuitbreiding $A_S/\underline{q}B_S \cap A_S \subset B_S/\underline{q}B_S$ passen we (2.4.) toe. Conclusie $\underline{q}B_S \cap A_S=\underline{p}A_S$ = het enige maximale ideaal van A_S. Dan ook $\underline{q} \cap B = \underline{p}$. Verder laten $\underline{q}_1 \subseteq \underline{q}_2$ priemidealen in B zijn met $\underline{q}_i \cap A = \underline{p}$, dan levert (2.4.) toegepast op $A_S/\underline{p}A_S \subset B_S/\underline{q}_1B_S$ dat $\underline{q}_1 = \underline{q}_2$.

Opgave 10. (Going-up theorem). $A \subset B$ zoals boven. Zij gegeven een keten priemidealen $\underline{p}_0 \subset\ldots\subset \underline{p}_r$ in A en een priemideaal $\underline{q}_0$ in B met $\underline{q}_0 \cap A = \underline{p}_0$. Toon aan dat er een keten priemidealen $\underline{q}_0 \subset \underline{q}_1 \subset\ldots\subset \underline{q}_r$ in B bestaat met $\underline{q}_i \cap A = \underline{p}_i$ voor alle i.

(2.6.) <u>Noether's normalisatie</u>. (k een willekeurig lichaam). Zij I een ideaal in $k[X_1,...,X_n]$, dan zijn er nieuwe variabelen $Y_1,...,Y_n$ met $I \cap k[Y_1,...,Y_d] = 0$ $(0 \leq d \leq n)$ en $k[Y_1,...,Y_n]/_I$ is eindig over $k[Y_1,...,Y_d]$.

<u>Bewijs</u>. Kies een $f \in I$, $f \neq 0$. Schrijf $f = f_0+...+f_s$ als som van homogene polynomen, $f_s \neq 0$. Als k oneindig is dan zijn er $\lambda_1,...,\lambda_{n-1} \in k$ met $f_s(\lambda_1,...,\lambda_{n-1},1) \neq 0$ (voor een eindig lichaam wordt een andere truc toegepast). Kies nieuwe variabelen $Y_i = X_i-\lambda_i X_n$ $(i = 1,...,n-1)$ en $Y_n = X_n$.
Dan heeft $g(Y_1,...,Y_n) = f(X_1,...,X_n)$ de vorm $Y_n^s + a_{s-1}Y_n^{s-1}+...+a_0$ met $a_i \in k[Y_1,...,Y_{n-1}]$. Dus, met $I' = I \cap k[Y_1,...,Y_{n-1}]$, vinden we een eindige ringuitbreiding $k[Y_1,...,Y_{n-1}]/_{I'} \rightarrow k[Y_1,...,Y_n]/_I$.
Met inductie volgt de stelling.

(2.7.) <u>Gevolg</u>. (k een willekeurig lichaam). Voor ieder maximaal ideaal $\underline{m}$ van $k[X_1,...,X_n]$ is $k[X_1,...,X_n]/_{\underline{m}}$ een eindige lichaamsuitbreiding van k.

<u>Bewijs</u>. Pas (2.6.) toe op het ideaal $\underline{m}$. Lying-over gebruikend vindt men dat $d = 0$.
<u>Bewijs van (2.2.)</u>. Zij $X \subset A^n$ gegeven door het ideaal I en laat $f \in k[T_1,...,T_n]$ voldoen aan $f|X = 0$. Beschouw het ideaal (I, T_0f-1) in $k[T_0,T_1,...,T_n]$. Uit (2.7.) en k is algebraïsch gesloten volgt dat $(I,T_0f-1) = (1)$. Dus $(1-fT_0)(a_0+a_1T_0+...+a_sT_0^s) \in 1 + I.k[T_0,...,T_n]$, waarbij alle $a_i \in k[T_1,...,T_n]$. Dit uitschrijvend vindt men $f^{s+1} \in I$.

<u>definitie</u>. Een <u>reguliere</u> funktie op een gesloten $X \subset A^n$ is een afbeelding $f: X \rightarrow k$ waarvoor een polynoom $p \in k[T_1,...,T_n]$ bestaat met $f = p|X$.

(2.8.) De ring van de reguliere funkties (met gewone optelling en vermenigvuldiging) is isomorf met $k[T_1,...,T_n]/_I$, waarbij I het radikale

ideaal $\{f \in k[T_1,\ldots,T_n] \mid f|X = 0\}$ is. Deze ring heet de coördinatenring van X en wordt genoteerd met $k[X]$.

definitie. Een afbeelding $\phi: X \to Y$ tussen gesloten deelverzamelingen van A^n resp. A^m heet regulier of een morfisme als er polynomen $p_1,\ldots,p_m \in k[T_1,\ldots,T_n]$ bestaan zódat voor alle $a \in X$ geldt $\phi(a) = (p_1(a),\ldots,p_m(a))$.

(2.9.) De morfismen $X \to Y$ corresponderen 1-1 met de k-algebra homomorfismen $k[Y] \to k[X]$.

Voorbeelden.

(1) Mor $(X,k) = k[X]$.

(2) Een lineaire afbeelding $A^n \to A^m$ is een morfisme.

(3) De projectie van de kromme $XY-1$ in A^2 op A^1 is een morfisme. Merk op dat het beeld van de afbeelding niet gesloten is.

(4) $\phi: k \to X$ met $X \subset A^2$ is de kromme X^2-Y^3, gegeven door $t \to (t^3,t^2)$ is een morfisme. Merk op dat ϕ bijectief is. Toch is ϕ geen isomorfisme omdat ϕ^{-1} geen morfisme is.

(5) Zij k een lichaam met karakteristiek $p \neq 0$. Zij $X \subset A^n$ een gesloten deelverzameling gedefinieerd over $\mathbb{F}_q$, d.w.z. id(X) wordt voortgebracht door polynomen die alle coefficienten in $\mathbb{F}_q$ hebben (en $q = p^n$). De afbeelding $\phi: X \to X$ gegeven door $(a_1,\ldots,a_n) \to (a_1^q,\ldots,a_n^q)$ bestaat dan en is een morfisme; ϕ heet de Frobenius afbeelding. Zoals in (4) de afbeelding ϕ is bijectief maar geen isomorfisme. Het belang van de Frobenius afbeelding ligt in de eigenschap: $\phi(a) = a \Leftrightarrow$ alle coördinaten van a liggen in $\mathbb{F}_q$.

(6) Laten X, Y gesloten deelverzamelingen van A^n resp. A^m zijn. Dan is het product $X \times Y$ een gesloten deelverzameling van A^{n+m} (Ga na). In het bijzonder voor $n = m$ krijgen we $X \cap Y \underset{\phi}{\tilde{\to}} (X \times Y) \cap \Delta$, waarbij Δ de diagonaal van $A^n \times A^n$ is. De afbeelding ϕ wordt gegeven door $z \mapsto (z,z)$.

(2.10.) Zij ϕ: $X \to Y$ een morfisme. Dan is de geassocieerde afbeelding ϕ^*: $k[Y] \to k[X]$ injectief $\Leftrightarrow$ $\phi(X)$ is dicht in Y.

Bewijs. Als ϕ^* niet injektief is dan is er een $f \in k[Y]$ met $\phi^*(f) = 0 \neq f$. Dus $\phi(X)$ is bevat in de gesloten deelverzameling $Y \cap \{a \in A^n | f(a) \neq 0\} \subsetneq Y$ en $\overline{\phi(X)} \neq Y$. Anderzijds als $\overline{\phi(X)} \neq Y$ dan is er volgens (2.3) een $f \in k[Y]$, $f \neq 0$ met $f|\overline{\phi(X)} = 0$. Ofwel $\phi^*(f) = 0$.

Opgave 11. Bepaal van f: $A^2 \to A^2$, $(x,y) \to (x,xy)$ het beeld. Is het beeld open, gesloten, dicht?

Opgave 12. Zij f: $A^n \to A^n$ een isomorfisme gegeven door $f = (P_1,\ldots,P_n)$. Zijn Jacobiaan $J(f) = \det(\frac{\partial P_i}{\partial X_j})$ is een element van $k[T_1,\ldots,T_n]$. Bewijs dat $J(f) \in k^*$ en dat de afbeelding $f \to J(f)$ een groepshomomorfisme is.

Opgave 13. Zij f: $X \to Y$ een morfisme. De deelverzameling $T = \{(x,f(x) \in X\times Y \mid x \in X\}$ van XxY heet de grafiek van f. Bewijs dat T gesloten is en dat T isomorf is met X.